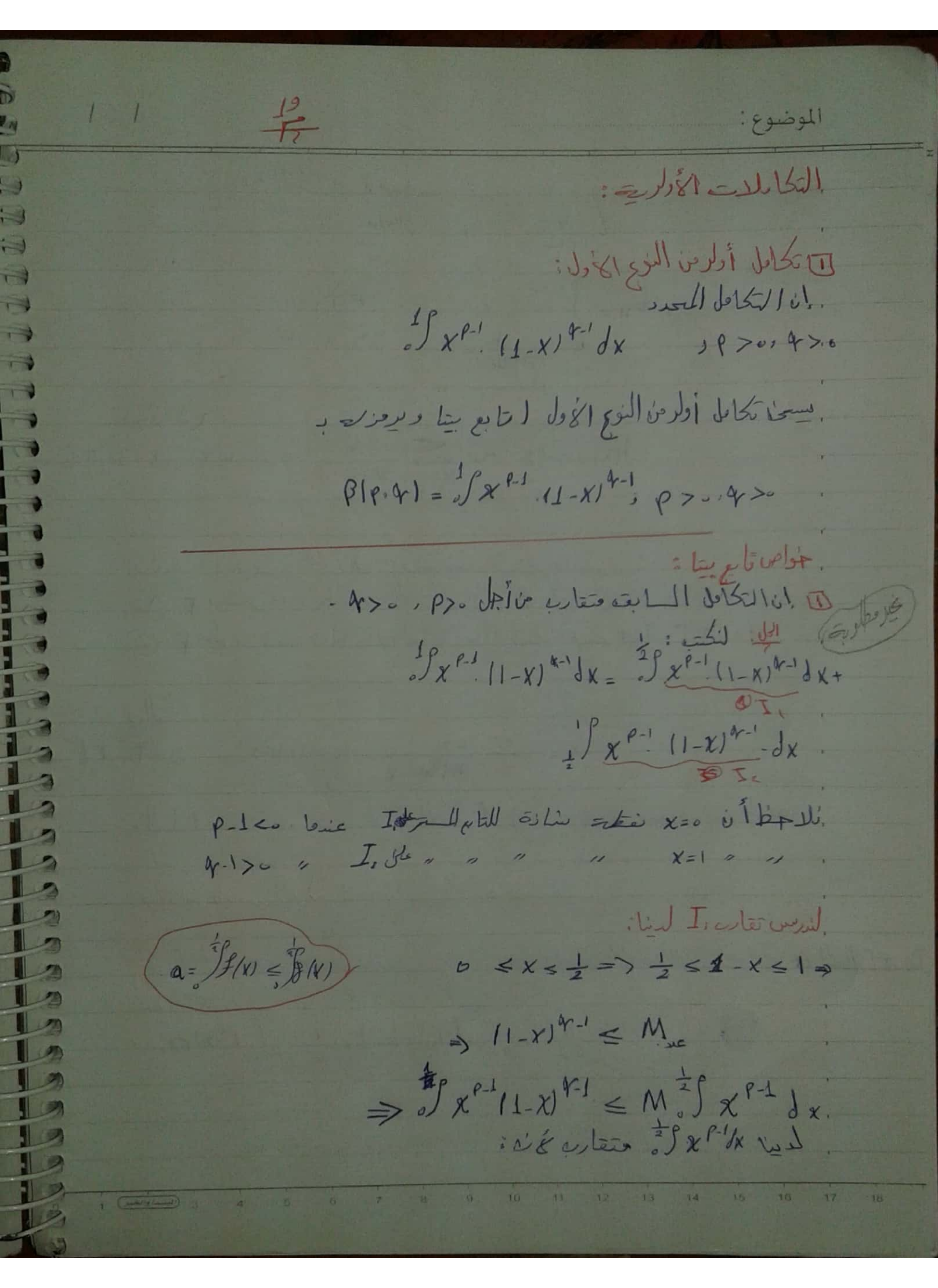


الموضوع: / /   19/12

التكاملات الأولرية:

1) تكامل أولر من النوع الأول:

إن التكامل المحدد

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad ; p>0, q>0$$

يسمى تكامل أولر من النوع الأول (تابع بيتا) ويرمز له ب

$$\beta(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} \; ; \; p>0, q>0$$

خواص تابع بيتا:

1) إن التكامل السابق متقارب من أجل $p>0$ ، $q>0$.

(غير مطلوب)

الحل: لنكتب:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx}_{(1)\ I_1} + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx}_{(2)\ I_2}$$

نلاحظ أن $x=0$ نقطة شاذة للتابع المستكمل I عندما $p-1<0$

" $x=1$ " " " " على I_1 " $q-1>0$

لندرس تقارب I_1 لدينا:

$$0 \le x \le \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \le 1-x \le 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-x)^{q-1} \le M \text{ عدد}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{q-1} \le M\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}dx$$

لدينا $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}dx$ متقارب لأنه:

$$a=\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) \le \int_0^{\frac{1}{2}} g(x)$$

الموضوع:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} x^{p-1}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\frac{x^p}{p}\right]_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{p}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^p - \varepsilon^p\right]$$

$$= \frac{1}{p}\left[\frac{1}{2}\right]^p$$ نهاية موجودة ومحدودة ، $p > 0$

وبالتالي حسب اختبار المقارنة في التكاملات المعتلة:

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}$$

متقاربة.

وبنفس الطريقة يكون:

$$I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}\,dx$$

متقاربة عندما $q>0$.

---

2 تناظر التابع β:

حفظ $\boxed{\beta(p,q) = \beta(q,p)}$ ، $p>0,\ q>0$

الحل:

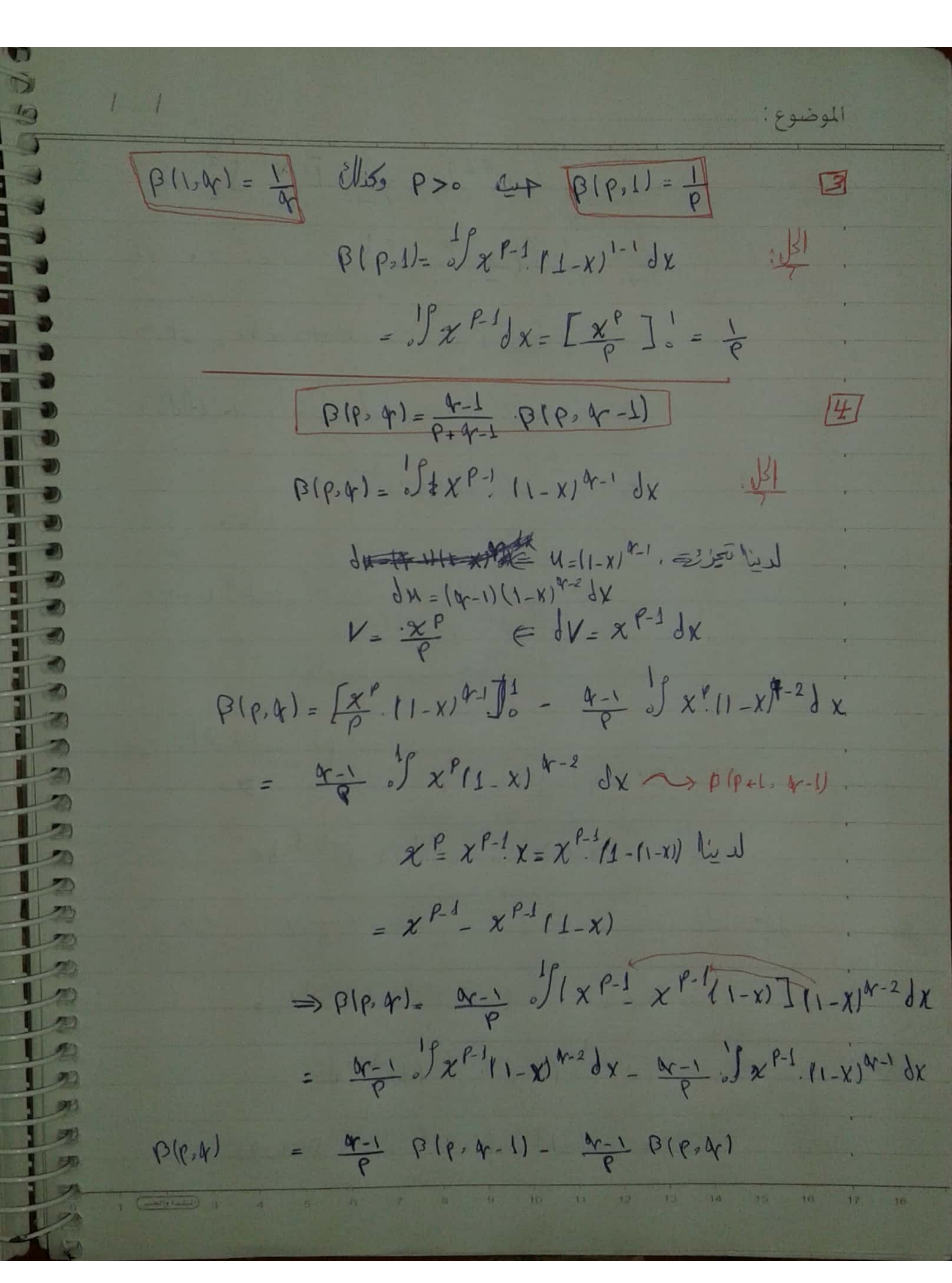
$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}\,dx$$

لنفرض $1-x=t \Leftarrow x=1-t \Leftarrow dx=-dt$

$$\Rightarrow \beta(p,q) = -\int_1^0 (1-t)^{p-1}\,(t)^{q-1}\,dt$$

$$= \int_0^1 (1-t)^{p-1}\cdot(t)^{q-1}\,dt$$

$$= \int_0^1 (t)^{q-1}\cdot(1-t)^{p-1}\,dt = \beta(q,p)$$



الموضوع :

3

$\beta(p,1) = \frac{1}{p}$ حيث $p>0$ وكذلك $\beta(1,q) = \frac{1}{q}$

الحل:

$$\beta(p,1) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{1-1}\,dx$$

$$= \int_0^1 x^{p-1}\,dx = \left[\frac{x^p}{p}\right]_0^1 = \frac{1}{p}$$

4

$$\beta(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1}\,\beta(p,q-1)$$

الحل:

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

لدينا تجزئة، $u=(1-x)^{q-1}$

$du = (q-1)(1-x)^{q-2}\,dx$

$V = \frac{x^p}{p} \Leftarrow dV = x^{p-1}\,dx$

$$\beta(p,q) = \left[\frac{x^p}{p}(1-x)^{q-1}\right]_0^1 - \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}\,dx$$

$$= \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}\,dx \rightsquigarrow \beta(p+1,q-1)$$

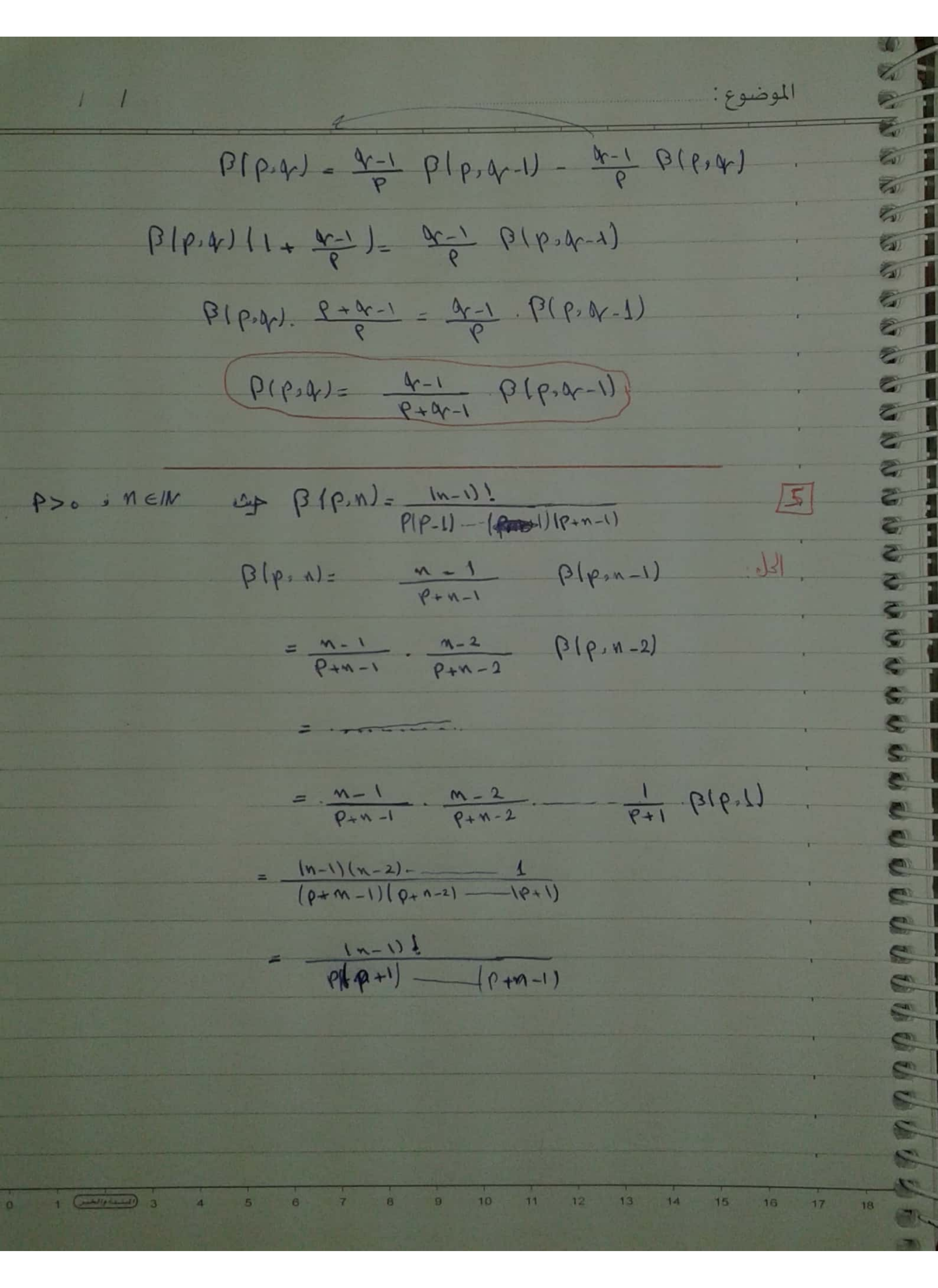
لدينا $x^p = x^{p-1}\cdot x = x^{p-1}(1-(1-x))$

$$= x^{p-1} - x^{p-1}(1-x)$$

$$\Rightarrow \beta(p,q) = \frac{q-1}{p}\int_0^1 \left[x^{p-1} - x^{p-1}(1-x)\right](1-x)^{q-2}\,dx$$

$$= \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}\,dx - \frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

$$\beta(p,q) = \frac{q-1}{p}\beta(p,q-1) - \frac{q-1}{p}\beta(p,q)$$



$$\beta(p,q) = \frac{q-1}{p}\,\beta(p,q-1) - \frac{q-1}{p}\,\beta(p,q)$$

$$\beta(p,q)\left(1 + \frac{q-1}{p}\right) = \frac{q-1}{p}\,\beta(p,q-1)$$

$$\beta(p,q)\cdot\frac{p+q-1}{p} = \frac{q-1}{p}\cdot\beta(p,q-1)$$

$$\boxed{\beta(p,q) = \frac{q-1}{p+q-1}\,\beta(p,q-1)}$$

---

5 $\beta(p,n) = \dfrac{(n-1)!}{p(p-1)\cdots(\;-1)(p+n-1)}$ حيث $p>0$ ، $n \in \mathbb{N}$

الحل :

$$\beta(p,n) = \frac{n-1}{p+n-1}\,\beta(p,n-1)$$

$$= \frac{n-1}{p+n-1}\cdot\frac{n-2}{p+n-2}\,\beta(p,n-2)$$

$$= \ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{n-1}{p+n-1}\cdot\frac{n-2}{p+n-2}\cdots\frac{1}{p+1}\cdot\beta(p,1)$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)\cdots 1}{(p+n-1)(p+n-2)\cdots(p+1)}$$

$$= \frac{(n-1)!}{p(p+1)\cdots(p+n-1)}$$